Certamen Nazionale di Matematica “Renato Caccioppoli”

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”
Liceo Scientifico Statale “Giuseppe Mercalli”

NAPOLI, 31 marzo 2023
LSS “Giuseppe Mercalli”

Tempo a disposizione: 4 ore

AVVERTENZE

- Non sfogliare questo fascicoletto fino a quando l’insegnante non ti dice di farlo.
- Non è ammesso l’uso di CALCOLATRICI PROGRAMMABILI, libri di testo e tavole numeriche.
- Non è consentito comunicare con altri partecipanti o con l’esterno; IN PARTICOLARE, È PROIBITO L’USO DI TELEFONI CELLULARI.
- La prova consiste di 25 problemi divisi in 3 sezioni.
  Per i quindici problemi numerati da 1 a 15 che costituiscono la “**Sezione A: problemi a risposta chiusa**”, sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere A, B, C, D, E. Una sola di queste risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta dovrà essere scritta (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  Gli otto problemi numerati da 16 a 23, che costituiscono la “**Sezione B: problemi a risposta aperta**”, richiedono solo una risposta che va indicata (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  Infine, per i problemi 24 e 25, che costituiscono la “**Sezione C: problemi con dimostrazione”**, bisogna fornire la dimostrazione richiesta. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e utilizzando soltanto i fogli di questo fascicoletto. La dimostrazione fornita a ciascuno di tali problemi sarà valutata con un punteggio da 0 a 15.

• Nella busta grande contenente questo fascicoletto troverai anche una busta piccola con un cartoncino da compilare con i tuoi dati personali e da reinserire poi nella busta piccola. Al momento della consegna del fascicoletto compilato con le tue risposte, dovrai chiudere la busta piccola in presenza di un docente: entrambi (fascicoletto e busta piccola) saranno reinseriti nella busta grande che a quel punto sarà chiusa in via definitiva.

AVVERTENZA IMPORTANTE: Non lasciare segni identificativi su questi fogli.
Quando l’insegnante darà il via, potrai cominciare a lavorare. **Leggi attentamente la nota a pié di pagina 1** e ricorda che hai 4 ore di tempo. Buon lavoro!

SEZIONE A : PROBLEMI A RISPOSTA CHIUSA[1]

Problema 1. Sia
$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ 4^x + 2^{x+1} - 3 \geq 0\}.$$
Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

(A) $\max A$ non esiste.

(B) $\sup A = +\infty$.

(C) $\inf A = 0$.

(D) $\min A = 0$.

(E) nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (E).
Infatti, occorre risolvere la disequazione

$$2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 3 \geq 0$$

da cui, con la sostituzione $t = 2^x$, si ha:

$$t^2 + 2t - 3 \geq 0 \Longleftrightarrow t \leq -3 \vee t \geq 1 \Longleftrightarrow 2^x \leq -3 \vee 2^x \geq 1 \Longleftrightarrow 2^x \geq 1 \Longleftrightarrow x \geq 0.$$

Quindi $\inf A = \min A = 0$, $\sup A = +\infty$ e ovviamente il massimo non esiste.

Problema 2. Si consideri la seguente proposizione relativa ad un ben individuato frutteto:

P: *Ogni fiore su ogni albero di mele diede vita ad un frutto.*

La sua negazione è data dalla proposizione:

(A) *nel frutteto nessun albero ebbe fiori che diedero vita a frutti.*

(B) *nel frutteto si osservò un albero con nessun frutto.*

(C) *nel frutteto si osservò un albero avente un fiore che non diede vita ad un frutto.*

(D) *nel frutteto ogni albero ebbe un fiore che non diede vita ad un frutto.*

(E) *nel frutteto si osservò un albero i cui fiori non diedero frutti.*

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Infatti, per negare P basta l'osservazione di un albero con un fiore che non diede vita ad un frutto.

Problema 3. L'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$\log_\pi[\cos(5x + 2)] = 1$$

è

[1] Nel presente questionario sono utilizzate le seguenti convenzioni. Un punto è indicato con una lettera maiuscola (ad esempio, A); un segmento orientato è indicato con la coppia di lettere che rappresentano gli estremi del segmento (ad esempio, AB è il segmento orientato da A verso B); un segmento non orientato è indicato con la sopralineatura sul simbolo del segmento orientato (ad esempio, $\overline{AB}$); la lunghezza di un segmento è indicata racchiudendo il segmento (orientato o meno) tra una coppia di linee verticali (ad esempio, $|AB|$ oppure $|\overline{AB}|$); un angolo è indicato dalla terna di lettere, con accento circonflesso sulla seconda, che individua il vertice dell'angolo (ad esempio, $A\widehat{B}C$); un poligono è indicato con la sequenza delle lettere dei suoi vertici (ad esempio, il triangolo ABC); per il triangolo si userà anche la convenzione di far precedere la sequenza dei tre vertici dal simbolo Δ (ad esempio, il triangolo ΔABC); $\ln x$ rappresenta il logaritmo naturale del numero reale positivo x; $\mathbb{N}$ rappresenta l'insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Ulteriori indicazioni o chiarimenti saranno dati come nota (a piè pagina) al corrispondente problema.

(A) $\left\{\pm\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(B) $\left\{\pm\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(C) $\emptyset$.

(D) $\left\{\pm\frac{\pi}{5}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(E) $\{\pm\pi+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Infatti,

$$\log_\pi[\cos(5x+2)]=1 \iff \cos(5x+2)=\pi,$$

per cui l'equazione assegnata è impossibile dal momento che il coseno assume solo valori appartenenti all'intervallo $[-1,1]$.

Problema 4. Per ogni intero positivo n, sia

$$I_n=(n+1)^2+n-\left\lfloor\sqrt{(n+1)^2+n+1}\right\rfloor^2,$$

dove il simbolo $\lfloor x\rfloor$ (con x numero reale) denota il massimo intero $\leq x$. Allora:

(A) $I_n=0$ per qualche intero positivo n.

(B) $I_n=0$ per ogni intero positivo n.

(C) $I_n<0$ per ogni intero positivo n.

(D) $I_n>0$ per ogni intero positivo n.

(E) al variare dell'intero positivo n, I_n assume valori sia positivi, sia negativi, sia nulli.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (D).
Infatti, il calcolo di I_n per i primi valori di n ($n=1,2,3,4,\ldots$) suggerisce la congettura "$I_n=n$". D'altra parte

(i) $(n+1)^2<(n+1)^2+n+1=(n+1)(n+2)<(n+2)^2 \implies$

(ii) $n+1<\sqrt{(n+1)^2+n+1}<n+2 \implies$

(iii) $\left\lfloor\sqrt{(n+1)^2+n+1}\right\rfloor=n+1 \implies$

(iv) $\left\lfloor\sqrt{(n+1)^2+n+1}\right\rfloor^2=(n+1)^2$,

e quindi

$$I_n=(n+1)^2+n-\left\lfloor\sqrt{(n+1)^2+n+1)}\right\rfloor^2=n.$$

Problema 5. L'insieme di definizione D della seguente funzione

$$f(x)=\sqrt{\frac{|x|}{\ln^2 x-3\ln x+2}}.$$

è:

(A) $D=]-\infty,e[\cup]e^2,+\infty[$.

(B) $D =]-\infty, e] \cup [e^2, +\infty[$.

(C) $D =]0, e[\cup]e^2, +\infty[$.

(D) $D =]0, e] \cup [e^2, +\infty[$.

(E) $D =]0, e^{-2}[\cup]e^{-1}, +\infty[$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Infatti, la funzione in questione è ben definita quando il radicando è non negativo e l'argomento del logaritmo è positivo:

$$\begin{cases} \frac{|x|}{\ln^2 x - 3\ln x + 2} \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln^2 x - 3\ln x + 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} .$$

Per la prima condizione nel precedente sistema, posto $t = \log x$, risulta

$$t^2 - 3t + 2 > 0 \iff (t-1)(t-2) > 0 \iff t < 1 \vee t > 2.$$

In conclusione, si ha:

$$\begin{cases} \ln x < 1, \ \ \ln x > 2 \\ x > 0 \end{cases} \iff 0 < x < e \vee \ x > e^2.$$

Problema 6. Il numero delle possibili mischiate fatte con un "mazzo" di 40 carte è

$$\begin{aligned} 40! &= 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 815\,915\,283\,247\,897\,734\,345\,611\,269\,596\,115\,894\,272\,000\,000\,000. \end{aligned}$$

Si vede così che esso termina con 9 cifre uguali a 0. Con quante cifre uguali a 0 termina il numero delle possibili mischiate fatte con un mazzo di 80 carte?

(A) 30.

(B) 18.

(C) 19.

(D) 20.

(E) 50.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
In 80! ci sono 16 multipli di 5 dei quali tre $(25, 50, 75)$ sono anche multipli di 5^2. Quindi, in 80! ci sono 19 fattori uguali a 5 e più di 19 fattori uguali a 2. In definitiva, in 80! ci sono 19 fattori uguali a 10 che lo faranno terminare con 19 cifre uguali a 0.

Problema 7. Per quale valore del parametro reale a le parabole di equazione $y = ax^2 + 2x$ e $y = 3x^2 - ax$ hanno la stessa tangente nell'origine?

(A) 2.

(B) -2.

(C) 3.

(D) 0.

(E) Per ogni valore di a.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (B).
Imponendo che la retta $y = mx$ abbia nell'origine intersezione doppia con la prima parabola si trova $m = 2$; imponendo la stessa condizione tra la retta $y = 2x$ e la seconda parabola si trova $a = -2$. In alternativa, tenendo conto che la derivata dei due trinomi fornisce il valore dei coefficienti angolari delle rispettive tangenti, il coefficiente della retta tangente nell'origine alla prima parabola vale 2 mentre quello della seconda vale $-a$, e affinché le due rette tangenti risultino uguali, deve essere $a = -2$.

Problema 8. Se f è la funzione avente il grafico in Figura 1,[2] quale delle seguenti affermazioni è

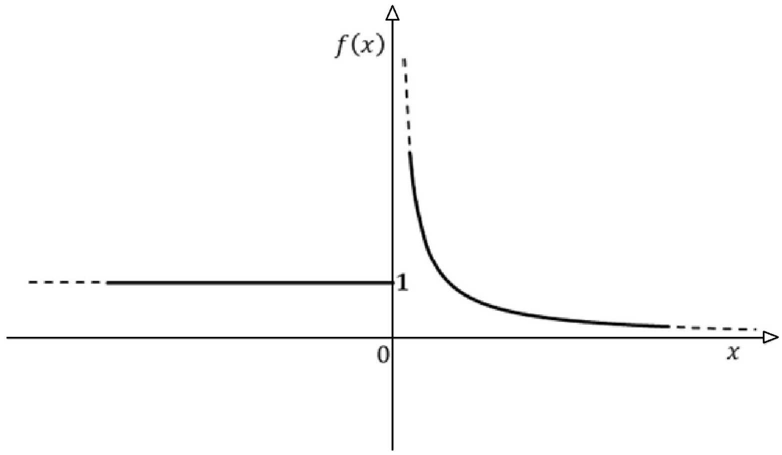

Figura 1: ad illustrazione del Problema 8.

falsa?

(A) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

(B) $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$.

(C) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$.

(D) $\exists \lim_{x \to 0} f(x)$.

(E) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (D).
Infatti, dal grafico si evince che risulta:

$$1 = \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Problema 9. Partendo da un assegnato capitale iniziale $x_0 > 0$, si consideri la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decrescente definita in modo che x_{n+1} si riduce del 10% rispetto ad x_n. Indicato con $\bar{n}$ il più piccolo valore di n per il quale x_n è minore di $x_0/3$ si ha che :

(A) $\bar{n} = 10$.

(B) $\bar{n} = 11{,}3$.

(C) $\bar{n} = 8$.

(D) $\bar{n} = 11$.

[2] In Figura 1 il tratteggio indica il comportamento asintotico del grafico della funzione f.

(E) nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (D).
Infatti, $x_{n+1} = 0{,}9x_n \implies x_n = 0{,}9^n x_0$ per cui:

$$\begin{aligned} x_n < \frac{x_0}{3} &\iff \frac{x_n}{x_0} < \frac{1}{3} \iff 0{,}9^n < \frac{1}{3} \\ &\iff \log_{10} 0{,}9^n < \log_{10} \frac{1}{3} \iff n \log_{10} 0{,}9 < -\log_{10} 3 \\ &\iff n > \frac{-\log_{10} 3}{\log_{10} 0{,}9} \approx 10{,}43 \implies \bar{n} = 11. \end{aligned}$$

Problema 10. Dato un parallelogramma di area $4\sqrt{2}$ cm^2 e perimetro 8 cm, la misura in gradi dell'angolo acuto è:

(A) 30.

(B) 45.

(C) 60.

(D) non univocamente determinabile dai dati assegnati.

(E) non esprimibile in quanto non esiste un tale parallelogramma.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (E).
Infatti, detti b, l, h, rispettivamente, il lato scelto come base, l'altro lato e l'altezza relativa alla base, si ha $b + l = 4$ e $bh = 4\sqrt{2}$. Osservando che l'altezza è minore del lato essendo un cateto di un triangolo rettangolo di cui il lato è l'ipotenusa, si ha $4\sqrt{2} = bh < bl = b(4 - b)$ da cui $b^2 - 4b + 4\sqrt{2} < 0$ che è impossibile poiché il trinomio ottenuto ha $\Delta/4 = 4 - 4\sqrt{2} < 0$.

Problema 11. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che:

$$0 \leq f(x) \leq 5, \quad \text{per } x \in [0, 5].$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) Per $x \in [0, 5[$ si ha $0 \leq f(x) < 5$.

(B) Per $x \in]0, 5]$ si ha $0 < f(x) \leq 5$.

(C) Esiste $x^* \in [0, 5]$ tale che $f(x^*) = x^*$.

(D) Per $x \in]0, 5[$ si ha $0 < f(x) < 5$.

(E) Nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Per la proprietà di continuità (in un intervallo chiuso e limitato), la funzione $f(x)$ assume tutti i valori tra il minimo (0) e il massimo (5). Se $f(0) > 0$, il grafico di $f(x)$ dovrà scendere sotto il valore $f(0)$ — per consentire a $f(x)$ di assumere i valori dell'intervallo $[0, f(0)[$ — e quindi prima o poi intersecherà la retta di equazione $y = x$. Se, invece, $f(0) = 0$ allora $x^* = 0$.

Problema 12. Sia k un intero positivo. In un'urna sono collocate k biglie bianche e una sola biglia nera. Due giocatori, G_1 e G_2, si sfidano: vince il giocatore che per primo estrae, procedendo a turno e senza rimpiazzamento, la biglia nera. Il giocatore G_1 inizia ad estrarre e, pertanto, la probabilità che egli vinca alla prima estrazione vale $1/(k+1)$. La probabilità che sia G_2 a vincere alla seconda estrazione vale:

(A) $\frac{1}{k}$.

(B) $\frac{2}{k}$.

(C) $\frac{2}{k+1}$.

(D) $\frac{1}{k+1}$.

(E) $\frac{1}{k-1}$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (D).
Infatti, in primo luogo, si indichi con $\mathbb{P}(\cdot)$ la probabilità dell'evento in argomento e con $\mathbb{P}_A(\cdot)$ la probabilità dell'evento in argomento avendo saputo che si è verificato un assegnato evento A. Allora, posto B_1: "esce una biglia bianca alla prima estrazione", N_2: "esce la biglia nera alla seconda estrazione" e $G_2^{(2)}$: "il giocatore G_2 vince alla seconda estrazione", si ha:

$$\mathbb{P}\left[G_2^{(2)}\right] = \mathbb{P}\left(B_1 \cap N_2\right) = \mathbb{P}\left(B_1\right) \cdot \mathbb{P}_{B_1}\left(N_2\right) = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1}.$$

Problema 13. Con $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, la formulazione di $\operatorname{sen} x + \cos x$ in termini di $\operatorname{sen} 2x$ è:

(A) $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$.

(B) $\tan[\operatorname{sen}(2x)]$.

(C) $\sqrt{1+\operatorname{sen} 2x}$.

(D) 1+sen 2x.

(E) 2 sen 2x.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Infatti, risulta

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = 1 + \operatorname{sen} 2x.$$

Quindi, poiché per $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\operatorname{sen} x + \cos x > 0$,

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{1+\operatorname{sen} 2x}.$$

Problema 14. Sia

$$l = \lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) $l = e^{-\frac{1}{2}}$.

(B) $l = e^{\frac{1}{2}}$.

(C) $l = e^{-2}$.

(D) $l = e^{2}$.

(E) $l = 1$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (A).
Si ricordi che

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

dalla quale scaturisce che nell'intorno di 0 è possibile sostituire $\cos x$ con $1-\frac{x^2}{2}$. Allora, posto $y=\frac{1}{x^2} \iff x^2=\frac{1}{y}$, si ha:

$$l=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1/2}{y}\right)^{y}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

In alternativa, ricordando che

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\left\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{\cos x-1}{x^2}}\\ &= e^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Problema 15. Un triangolo equilatero e un quadrato hanno lo stesso perimetro. Cosa si può dire circa le loro aree?

(A) Hanno la stessa area.

(B) Il rapporto tra l'area del triangolo e quella del quadrato è $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

(C) Il rapporto tra l'area del triangolo e quella del quadrato è $\frac{3}{4}$.

(D) Il rapporto tra l'area del triangolo e quella del quadrato è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(E) Il rapporto tra l'area del triangolo e quella del quadrato è $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (E).
Basta osservare che: (i) il lato del quadrato è i $\frac{3}{4}$ del lato l del triangolo, (ii) l'area del quadrato vale $\frac{9}{16}l^2$, (iii) l'area del triangolo equilatero vale $\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$.
In definitiva, il rapporto tra l'area del triangolo e quella del quadrato è $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

SEZIONE B : PROBLEMI A RISPOSTA APERTA

Problema 16. Quante sono le soluzioni dell'equazione

$$4\,\mathrm{sen}^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-8\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$$

che si trovano nell'intervallo $]-\pi,\pi]$?

Soluzione. La risposta è 4.
Infatti,

$$\begin{aligned}
&4\,\mathrm{sen}^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-8\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1=0\\
\iff\ &4-4\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-8\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1=0\\
\iff\ &4\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+8\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-5=0\\
\iff\ &\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\\
\iff\ &\forall k\in\mathbb{Z},\quad x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad x_2=-\frac{\pi}{12}+k\pi.
\end{aligned}$$

Allora, x_1 soddisfa la richiesta quando $k\in\{-1,0\}$ e, analogamente, x_2 soddisfa la richiesta quando $k\in\{0,1\}$.

Problema 17. Determinare l'insieme di definizione D della seguente funzione

$$f(x)=x\log_x\left(\ln x^x\right).$$

Soluzione. La risposta è $D=]1,+\infty[$.
Infatti, ricordando l'insieme di definizione della funzione logaritmo e le condizioni richieste alla sua base, si ha:

$$x\in D \quad\iff\quad \begin{cases} x^x>0\\ \ln x^x>0\\ x>0\\ x\neq 1\end{cases} \quad\iff\quad \begin{cases} x>0\\ x\neq 1\\ x\ln x>0\end{cases} \quad\iff\quad x>1.$$

Problema 18. Fissato nel piano un riferimento cartesiano ortogonale monometrico, si considerino i punti

$$A(0,-10),B(2,0).^3$$

Trovare l'ascissa di un punto $C(a,b)$ sulla curva di equazione $y=x^2$ in modo che risulti minima l'area del triangolo ABC.

Soluzione. La risposta è $a=\frac{5}{2}$.
L'area del triangolo ABC è la metà del prodotto della lunghezza di AB (che è fissata) per l'altezza $CD\perp AB$, che invece varia con C, quando C descrive la parabola $y=x^2$. $|CD|$ è la distanza di C dalla retta per A,B di equazione $y=5x-10$. E questa retta non interseca la parabola $[x^2-(5x-10)=(x-5/2)^2+15/4>0]$. Ma allora, affinché il punto $C(a,a^2)$ sulla parabola renda minima l'area del triangolo ABC, la tangente in C alla parabola $[y=a^2+2a(x-a)]$ deve essere parallela alla retta per A,B. Pertanto $2a=5$ e così $a=\frac{5}{2}$.
In maniera alternativa, sia $C(a,a^2)$ il generico punto della parabola e $S(a)$ l'area del triangolo ABC. Si consideri come base del triangolo ABC il segmento AB; la lunghezza della relativa

[3] La scrittura $P(x,y)$ sta a rappresentare che, nel sistema di riferimento fissato, l'ascissa e l'ordinata del punto P sono, rispettivamente, x e y.

altezza CD è fornita dalla distanza di C dalla retta passante per A, B avente equazione $y = 5x - 10$:

$$|CD| = \frac{|a^2 - 5a + 10|}{\sqrt{26}} = \frac{a^2 - 5a + 10}{\sqrt{26}}.$$

Quindi, dal momento che $|AB| = 2\sqrt{26}$, risulta

$$S(a) = a^2 - 5a + 10$$

che ha il minimo in $a = 5/2$.

Problema 19. Il giorno 1 del mese di aprile del 2023 sarà erogato un prestito dell'importo di S_0 Euro. Tale somma dovrà essere restituita in rate mensili di importo R (costante e in euro) corrisposte a partire dal giorno 1 del mese di maggio del 2023. Indicando con $0 < i < 1$ il tasso di interesse mensile (costante) con il quale viene calcolato l'interesse sul debito residuo attuale, il debito residuo all'inizio del mese successivo è dato da

$$\forall n \geq 1, \qquad S_n = S_{n-1} + iS_{n-1} - R = (1+i)S_{n-1} - R.$$

Sapendo che,

$$\forall a \neq 1, \qquad \sum_{j=0}^{n} a^j = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

e supponendo che $S_0 = 10\,000$, $R = 200$ e $i = 0{,}01$, si richiede di determinare dopo quanti mesi sarà estinto il debito.[4]

Soluzione. La risposta è 70.
In primo luogo, risulta:

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1, \quad S_n &= (1+i)S_{n-1} - R = (1+i)\left[(1+i)S_{n-2} - R\right] - R \\
&= (1+i)^2 S_{n-2} - R\left[1 + (1+i)\right] = (1+i)\left[(1+i)S_{n-3} - R\right] - R \\
&= (1+i)^3 S_{n-3} - R\left[1 + (1+i) + (1+i)^2\right] \\
&\ \vdots \\
&= (1+i)^n S_0 - R\sum_{j=0}^{n-1}(1+i)^j = S_0(1+i)^n - R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.
\end{aligned}$$

Ne discende che

$$S_n \leq 0 \iff S_0(1+i)^n - R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \leq 0 \iff (1+i)^n(R - iS_0) \geq R.$$

Solo nel caso in cui $R - iS_0 > 0$ si ha

$$\begin{aligned}
S_n \leq 0 &\iff (1+i)^n \geq \frac{R}{R - iS_0} \iff n\ln(1+i) \geq \ln\frac{R}{R - iS_0} \\
&\iff n \geq \frac{1}{\ln(1+i)} \cdot \ln\frac{R}{R - iS_0}.
\end{aligned}$$

In definitiva, ricordando che si sta cercando il minimo intero che verifica la precedente condizione e che il simbolo $\lfloor x \rfloor$ (con x numero reale) denota il massimo intero $\leq x$, si ha:

$$n = \begin{cases} \frac{1}{\ln(1+i)} \cdot \ln\frac{R}{R-iS_0}, & \text{se } \frac{1}{\ln(1+i)} \cdot \ln\frac{R}{R-iS_0} \text{ è intero} \\ \\ \left\lfloor \frac{1}{\ln(1+i)} \cdot \ln\frac{R}{R-iS_0} \right\rfloor + 1, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

[4] Il debito si estingue quando per la prima volta il debito residuo risulta negativo o nullo.

Nel caso in questione risulta $R = 200$, $R - iS_0 = 100$, $1 + i = 1{,}01$ e la formula precedente fornisce:

$$n = \left\lfloor \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}01)} \right\rfloor + 1 = \lfloor 69{,}660\ldots \rfloor + 1 = 69 + 1 = 70.$$

Problema 20. Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x \right),$$

determinare l'intercetta della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa 1.

Soluzione. La risposta è $-2e$.
Infatti, risulta

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2}{3}x - \frac{7}{3} + \frac{2}{x} \right) \implies f'(1) = \frac{e}{3}.$$

Dal fatto che $f(1) = -5e/3$, si ha che la retta ricercata ha equazione:

$$y = -\frac{5}{3}e + \frac{e}{3}(x-1) \iff y = \frac{e}{3}(x-6).$$

Quindi l'intercetta della retta tangente al grafico della funzione assegnata nel punto di ascissa 1 vale $-2e$.

Problema 21. Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza avente l'angolo in A acuto. Sull'altezza AD si prenda un punto F tale che $DF = DE$ con E punto d'intersezione del prolungamento di AD con la circonferenza. Detto G il punto d'intersezione del prolungamento di BF con il lato AC, si determini il seno dell'angolo $B\hat{G}A$.

Soluzione. La risposta è 1.
Infatti, facendo riferimento alla Figura 2 si può ragionare nel seguente modo:

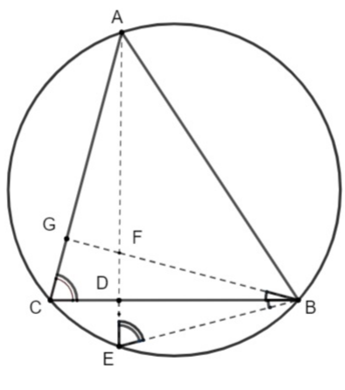

Figura 2: ad illustrazione del Problema 21.

1. unendo B con E si ha che gli angoli $F\hat{B}D$ e $D\hat{B}E$ sono uguali in quanto BD è altezza e mediana nel triangolo FBE;

2. gli angoli $B\hat{E}A$ e $B\hat{C}A$ sono uguali in quanto insistono sullo stesso arco (AB);

3. gli angoli $D\hat{B}E$ e $B\hat{E}D$ sono complementari in quanto il triangolo BDE è rettangolo in D.

Allora sono complementari anche $G\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$ per cui il triangolo BGC è rettangolo. In definitiva, $\operatorname{sen}(B\hat{G}A) = 1$.

Problema 22. In un fissato riferimento cartesiano Oxy del piano, qual è l'area della regione delimitata dalle condizioni $|x-y| \leq 2$, $x^2+y^2 \geq 2$ e $|y| \leq 3$?

Soluzione. La risposta è $2(12-\pi)$.
Risulta che la circonferenza Γ di equazione $x^2+y^2=2$ interseca la retta r di equazione $y=x-2$ nel punto $E(1,-1)$ e interseca la retta s di equazione $y=x+2$ nel punto $F(-1,1)$. Quindi, il cerchio C di circonferenza Γ è interno al parallelogramma P di vertici $A(-5,-3), B(1,3), C(5,3)$ e $D(-1,-3)$ che ha base $b=4$ e altezza $h=6$. Ne consegue che l'area A richiesta si ottiene sottraendo dall'area del parallelogramma P l'area del cerchio C di raggio $\sqrt{2}$:

$$A = bh - \pi r^2 = 24 - 2\pi = 2(12-\pi).$$

Problema 23. Sia $f(x) = x^{100} - 6x^{99} + 9x^{98} + 25x^4 - 677x + 6$. Determinare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{x-3}.$$

Soluzione. La risposta è 2023.
Si osservi che la funzione $f(x)$ può essere riscritta al seguente modo

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{98}\left(x^2-6x+9\right) + 25x^4 - 677x + 6 \\ &= x^{98}(x-3)^2 + 25x^4 - 677x + 6. \end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\left[x^{98}(x-3)\right] + \lim_{x\to 3} \frac{25x^4-677x+6}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{25x^4-677x+6}{x-3}.$$

In definitiva, dal momento che

$$25x^4 - 677x + 6 = (x-3)(25x^3+75x^2+225x-2),$$

si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\left(25x^3+75x^2+225x-2\right) \\ &= 25\cdot 3^3 + 75\cdot 3^2 + 225\cdot 3 - 2 = 2023. \end{aligned}$$

SEZIONE C : PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

Problema 24. Siano l, m, n, s numeri interi positivi e siano $q(n,m)$ e $r(n,m)$, il quoziente e il resto, rispettivamente, della divisione di n per m. Con queste posizioni, risulta:

$$n = m \cdot q(n,m) + r(n,m), \tag{1}$$
$$m \cdot [q(n,m)+1] > n, \tag{2}$$
$$r\,(n + s \cdot m, m) = r(n,m). \tag{3}$$

Ad esempio,

$$\begin{gathered} q(25,7) = 3, \quad r(25,7) = 4 \implies 25 = 3 \cdot 7 + 4, \\ 7 \cdot [q(25,7)+1] = 7 \cdot 4 > 25, \\ r(15+12,4) = r(27,4) = 3 = r(15,4). \end{gathered}$$

- (i) Dimostrare che $r(n,m) \in \{0,1,\ldots,m-1\}$.
- (ii) Dimostrare che $r(l+s,m) = r\big[r(l,m)+r(s,m),m\big]$.
- (iii) Posto $l' = r(l,m)$, dimostrare che $r(l \cdot s, m) = r(l' \cdot s, m)$.
- (iv) Dimostrare che $r(16^l,5) = 1$ e $r(6^s,5) = 1$.

Soluzione. (i) Per assurdo, sia $r(n,m) = m - 1 + s$. Allora,

$$n \overset{(1)}{=} m \cdot q(n,m) + r(n,m) = m \cdot q(n,m) + m - 1 + s = m[q(n,m)+1] + s - 1,$$

ma ciò contrasta con il significato del quoziente.
(ii) Si ha:

$$\begin{aligned} r(l+s,m) &\overset{(1)}{=} r\big[m \cdot q(l,m) + r(l,m) + m \cdot q(s,m) + r(s,m), m\big] \\ &= r\big\{r(l,m) + r(s,m) + [q(l,m)+q(s,m)] \cdot m, m\big\} \\ &\overset{(3)}{=} r\big[r(l,m)+r(s,m),m\big] \end{aligned}$$

(iii) Ricordando che si è posto $l' = r(l,m)$, dal fatto che

$$l \overset{(1)}{=} m \cdot q(l,m) + r(l,m) = m \cdot q(l,m) + l' \implies l \cdot s = l' \cdot s + m \cdot q(l,m) \cdot s,$$

si ha:

$$r(l \cdot s, m) = r\big[l' \cdot s + m \cdot q(l,m) \cdot s, m\big] \overset{(3)}{=} r(l' \cdot s, m).$$

(iv) Osservando che $r(16,5) = 1 = r(6,5)$ e che nell'espressione $r(n,m)$ la (iii) può essere applicata a ciascun fattore di n, si ha:

$$\begin{aligned} r\left(16^l,5\right) &= r\left(\underbrace{16 \cdot 16 \cdots 16}_{l-\text{volte}}, 5\right) \overset{(iii)}{=} r(1,5) = 1, \\ r\left(6^s,5\right) &= r\left(\underbrace{6 \cdot 6 \cdots 6}_{s-\text{volte}}, 5\right) \overset{(iii)}{=} r(1,5) = 1. \end{aligned}$$

Problema 25. ABC è un qualunque triangolo acutangolo (con i vertici A, B, C orientati in senso antiorario); D è un punto variabile sul lato BC (quello opposto ad A), ma diverso dagli estremi B e C di BC; D_C è il punto di AB, piede della perpendicolare condotta da D al lato AB (quello opposto a C); D_B è il punto di AC, piede della perpendicolare condotta da D al lato AC (quello opposto a B). Ovviamente, al variare di D su BC (con $B \neq D \neq C$), D_C varia su AB, D_B varia su AC, i tre punti D, D_C, D_B non sono allineati e AD_CDD_B è un quadrilatero convesso. Sia Γ_D la circonferenza passante per i tre punti D, D_C, D_B.
(1) Dimostrare che, qualunque sia la posizione di D su BC (con $B \neq D \neq C$), Γ_D passa per A.
(2) Qual è il punto D di BC (con $B \neq D \neq C$) che rende minima la lunghezza del segmento D_CD_B?
(3) Fornire una dimostrazione della risposta data a (2).

Soluzione. (1) AD_CD è un triangolo rettangolo con $\widehat{D}_C$ retto e quindi la circonferenza Γ_1 circoscritta al triangolo AD_CD ha per diametro AD.Anche la circonferenza Γ_2 circoscritta al triangolo rettangolo AD_BD ha per diametro AD. Dunque $\Gamma_1 = \Gamma_2$, questa è la circonferenza circoscritta al quadrilatero AD_CDD_B e $\Gamma_D = \Gamma_1 = \Gamma_2$ passa per A.
(2) Il punto D di BC (con $B \neq D \neq C$) che rende minima la lunghezza del segmento D_CD_B è il piede della perpendicolare condotta da A al lato BC.
(3) Qualunque sia il punto D di BC (con $B \neq D \neq C$), il segmento D_CD_B è la corda della circonferenza Γ_D sottesa dall'angolo alla circonferenza di vertice A, indipendente da D, perché angolo $\widehat{A}$ del triangolo dato ABC. Dunque, $|D_CD_B|$ è minima quando D rende minima la lunghezza della circonferenza Γ_D. Poiché AD è diametro di Γ_D, ciò accade quando AD è l'altezza di ABC relativa al lato BC.